Trabajo Práctico 1
Función cuadrática

Repaso teórico:

Una **función cuadrática** es aquella que puede escribirse como una ecuación de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde **a** , **b** y **c** (llamados **términos**) son números reales cualesquiera y **a** es distinto de **cero** (puede ser mayor o menor que cero, pero no igual que cero). El valor de **b** y de **c** sí puede ser **cero** .

En la ecuación cuadrática cada uno de sus términos tiene un nombre.

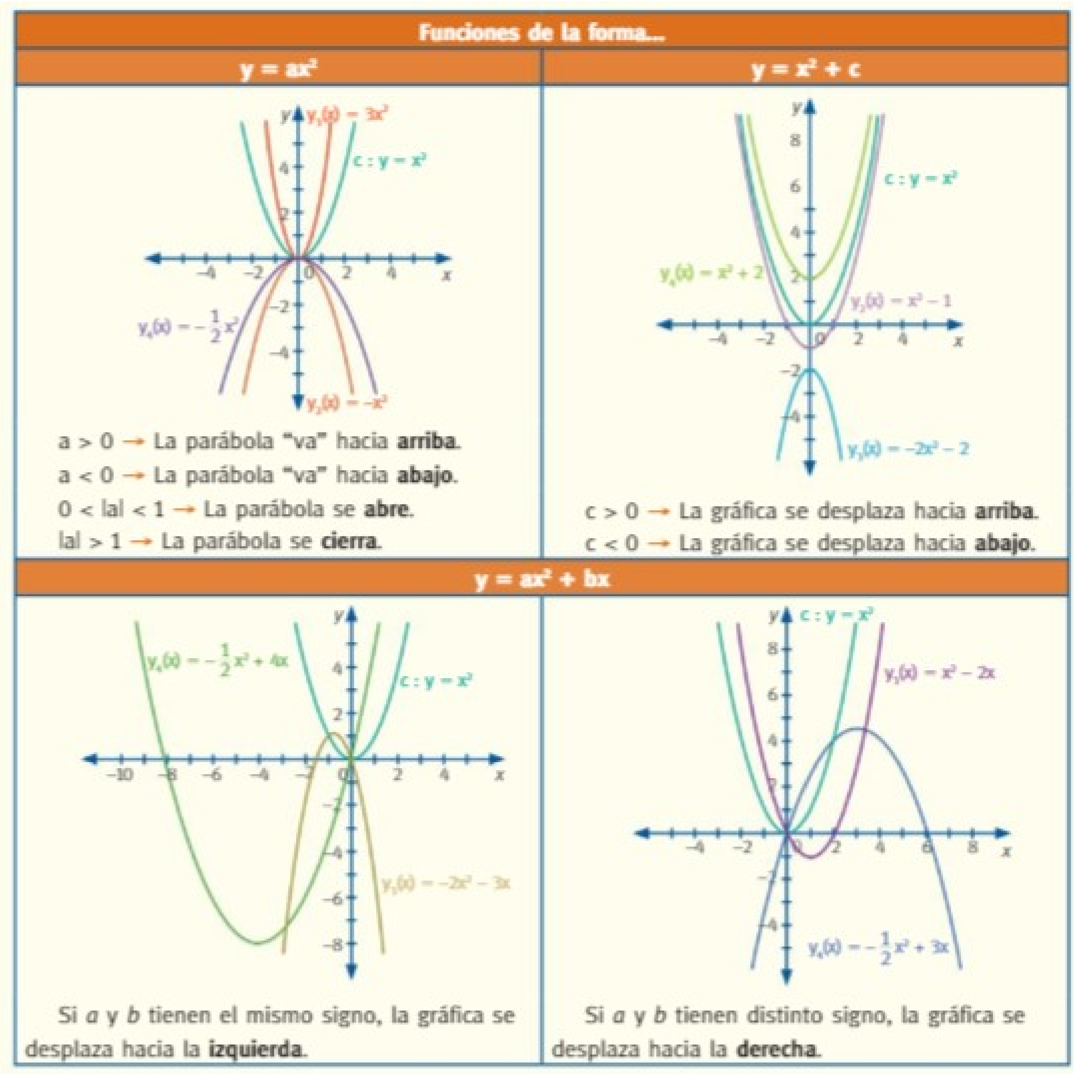
Así,

ax^2 es el término **cuadrático**

bx es el término **lineal**

c es el término **independiente**

Cuando estudiamos la **ecuación de segundo grado o cuadrática** vimos que si la ecuación tiene todos los términos se dice que es una **ecuación completa** , si a la ecuación le falta el término lineal o el independiente se dice que la ecuación es **incompleta.**



Representación gráfica de una función cuadrática

Si pudiésemos representar en una gráfica "todos" los puntos **[x,f(x)]** de una **función cuadrática**, obtendríamos siempre una curva llamada **parábola** .

Dicha parábola tendrá algunas características o elementos bien definidos dependiendo de los valores de la ecuación que la generan.

Estas características o elementos son:

Orientación o concavidad (ramas o brazos); Puntos de corte con el eje de abscisas (raíces); Punto de corte con el eje de ordenadas; Eje de simetría; Vértice.

Gráfica de la parábola

Para realizar el gráfico de una parábola, $f(x) = ax^2 + bx + c$, se debe hallar:

- **Raíces de la parábola:** son los puntos de intersección de la parábola con el eje x. Vale decir, cuando $f(x) = 0$.

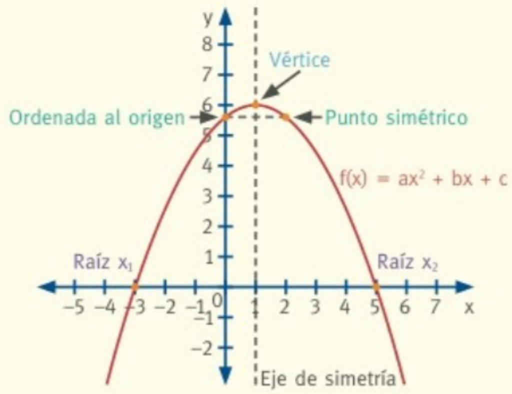
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Ordenada al origen de la parábola:** es el punto de intersección de la parábola con el eje y. Vale decir, cuando $f(0) = c$.

- **Vértice de la parábola:** es el punto de ordenada mayor o menor de la parábola. Sus coordenadas son $(x_v;y_v)$.

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad y_v = f(x_v)$$

- **Eje de simetría:** es la recta que divide a la parábola en dos ramas simétricas. Corta la parábola en su vértice; su ecuación es $x = x_v$. Permite ubicar puntos simétricos.

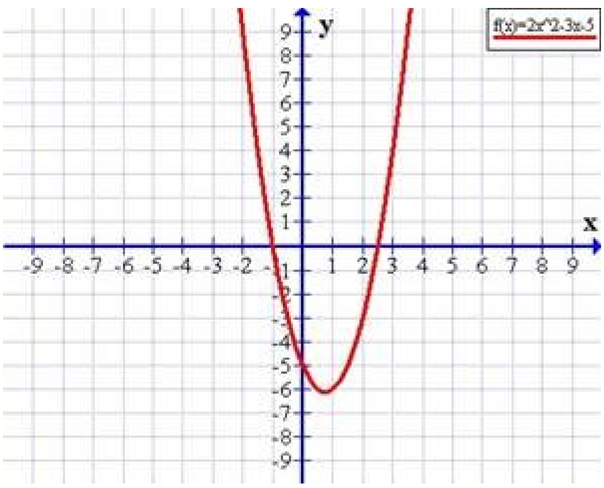


Orientación o concavidad

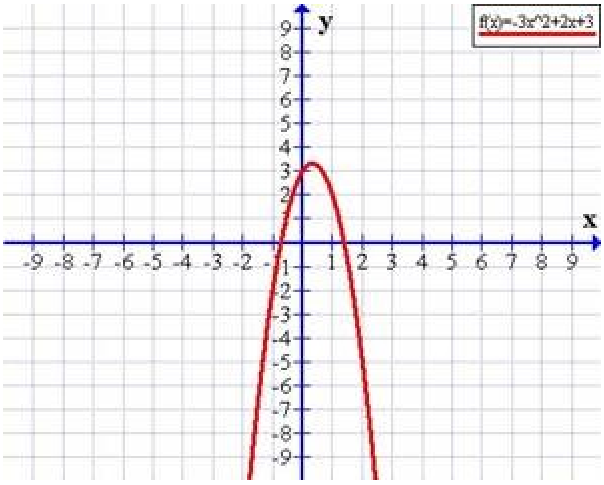
Una primera característica es la **orientación** o **concavidad** de la parábola. Hablamos de **parábola cóncava** si sus ramas o brazos se orientan hacia arriba y hablamos de **parábola convexa** si sus ramas o brazos se orientan hacia abajo.

Esta distinta orientación está definida por el valor (el signo) que tenga el término cuadrático **(la ax^2)** :

Si a > 0 (positivo) la parábola es cóncava o con puntas hacia arriba, como en $f(x)=2x^2-3x-5$



Si a < 0 (negativo) la parábola es convexa o con puntas hacia abajo, como en $f(x) = -3x^2 + 2x + 3$



Además, cuanto mayor sea |a| (el valor absoluto de a), más cerrada es la parábola.

Puntos de corte en el eje de las abscisas (Raíces o soluciones) (eje de las X)

Otra característica o elemento fundamental para graficar una función cuadrática la da el valor o los valores que adquiera **x** , los cuales deben calcularse.

Ahora, para calcular las raíces (soluciones) de cualquier función cuadrática calculamos

f (x) = 0 .

Esto significa que las raíces (soluciones) de una función cuadrática son aquellos **valores de x** para los cuales la expresión vale 0; es decir, los **valores de x tales que y = 0** ; que es lo mismo que **f(x) = 0** .

Entonces hacemos

$ax^2 + bx + c = 0$

Como la ecuación **$ax^2 + bx + c = 0$** posee un término de segundo grado, otro de primer grado y un término constante, no podemos aplicar las propiedades de las ecuaciones, entonces, para resolverla usamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces, las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática nos indican los puntos de intersección de la parábola con el **eje de las X (abscisas)** .

Respecto a esta intersección, se pueden dar tres casos:

Que corte al eje X en dos puntos distintos si $b^2-4ac>0$

Que corte al eje X en un solo punto (es tangente al eje x) si $b^2-4ac=0$

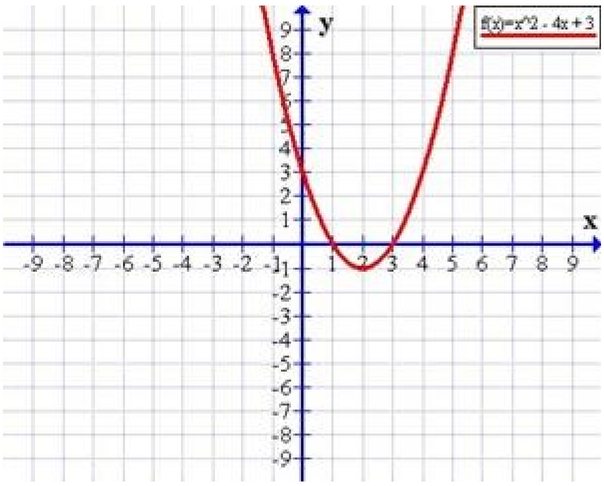
Que no corte al eje X si $b^2-4ac<0$

Punto de corte en el eje de las ordenadas (eje de las Y)

En el eje de ordenadas (Y) la primera coordenada es **cero** , por lo que el punto de corte en el eje de las ordenadas lo marca el valor de **c (0, c)** .

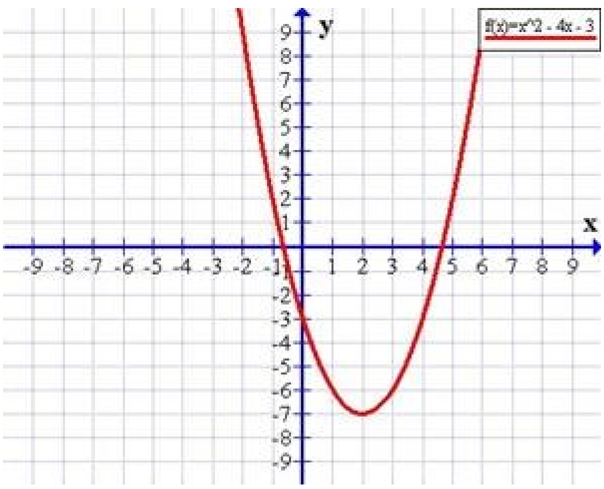
Veamos:

Representar la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$



El eje de las ordenadas (Y) está cortado en **+3**

Representar la función $f(x) = x^2 - 4x - 3$



El eje de las ordenadas (Y) está cortado en **−3**

Observar que la parábola siempre cortará al eje de las ordenadas (Y), pero como ya vimos más arriba al eje de abscisas (X) puede que no lo corte, lo corte en dos puntos o solamente en uno.

Vértice

Como podemos ver en gráfico precedente, el **vértice** de la parábola es el punto de corte (o punto de intersección) del eje de simetría con la parábola.

La abscisa de este punto corresponde al valor del eje de simetría $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ y la ordenada corresponde al valor máximo o mínimo de la función, se calcula reemplazando el valor obtenido como X_V en la función.

Análisis de funciones

Una **función** es una relación entre dos variables en la cual a cada valor de la primera (independiente) le corresponde un único valor de la segunda (dependiente).

Dominio y codominio de una función

El **conjunto dominio** (D_f) de la función está formado por los valores que puede tomar la variable independiente. El **conjunto codominio** está formado por todos los valores que puede tomar la variable dependiente. El **conjunto imagen** (I_m) es un subconjunto del codominio formado por los valores que toma la función.

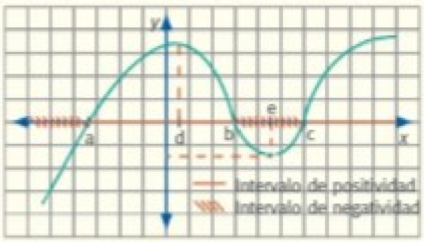
La imagen de *x* a través de la función *f* se denota con la expresión $y = f(x)$; donde *y* es imagen de *x* y *x* es preimagen de *y*.

$f: A \rightarrow B$ es función de A en B $\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists! y \in B / y = f(x)$
(donde $\forall$ se lee "para todo" y $\exists!$ se lee "existe un único")

Conjuntos de positividad y negatividad de una función

El **conjunto de positividad** está formado por todos los valores del dominio para los cuales la función es positiva. $C^+ = x \in D_f \wedge f(x) > 0$

El **conjunto de negatividad** está formado por todos los valores del dominio para los cuales la función es negativa. $C^- = x \in D_f \wedge f(x) < 0$



Los conjuntos de positividad y negatividad quedan determinados por las raíces reales de la función.

$C^+ = (a;b) \cup (c;+\infty)$

$C^- = (-\infty;a) \cup (b;c)$

Crecimiento y decrecimiento de una función

• Una función f(x) es **creciente**, en un cierto intervalo de su dominio, cuando al aumentar los valores que adopta la variable independiente, también aumentan los valores de sus imágenes.

$$f(x) \text{ es creciente} \Leftrightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

$f(x) = |x|$ *es creciente en el intervalo* $(0;+\infty)$, *pues:* $x_2 = 3 > x_1 = 1 \Rightarrow f(3) = 3 > f(1) = 1$

• Una función f(x) es **decreciente**, en un cierto intervalo de su dominio, cuando al aumentar los valores que adopta la variable independiente, disminuyen los valores de sus imágenes.

$$f(x) \text{ es decreciente} \Leftrightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

$f(x) = |x|$ *es decreciente en el intervalo* $(-\infty;0)$, *pues:* $x_2 = -1 > x_1 = -2 \Rightarrow f(-1) = 1 < f(-2) = 2$

Máximos y mínimos relativos de una función

En el punto en que la gráfica pasa de ser creciente a ser decreciente, existe un **máximo relativo**.
En el punto en que la gráfica pasa de ser decreciente a ser creciente, existe un **mínimo relativo**.
Una función puede tener más de un máximo o mínimo relativo.

Ejemplo:

Graficar y analizar la función f(x)=x²-5x+6

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$$

VÉRTICE

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2\cdot 1} \qquad \boxed{x_v = \frac{5}{2}}$$

$$y_v = x_v^2 - 5x_v + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\cdot\left(\frac{5}{2}\right) + 6 \qquad \boxed{y_v = -\frac{1}{4}}$$

Eje de simetría $x = \frac{5}{2}$

ORDENADA AL ORIGEN $(0,6)$

RAÍCES

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4AC}}{2\cdot A}$$

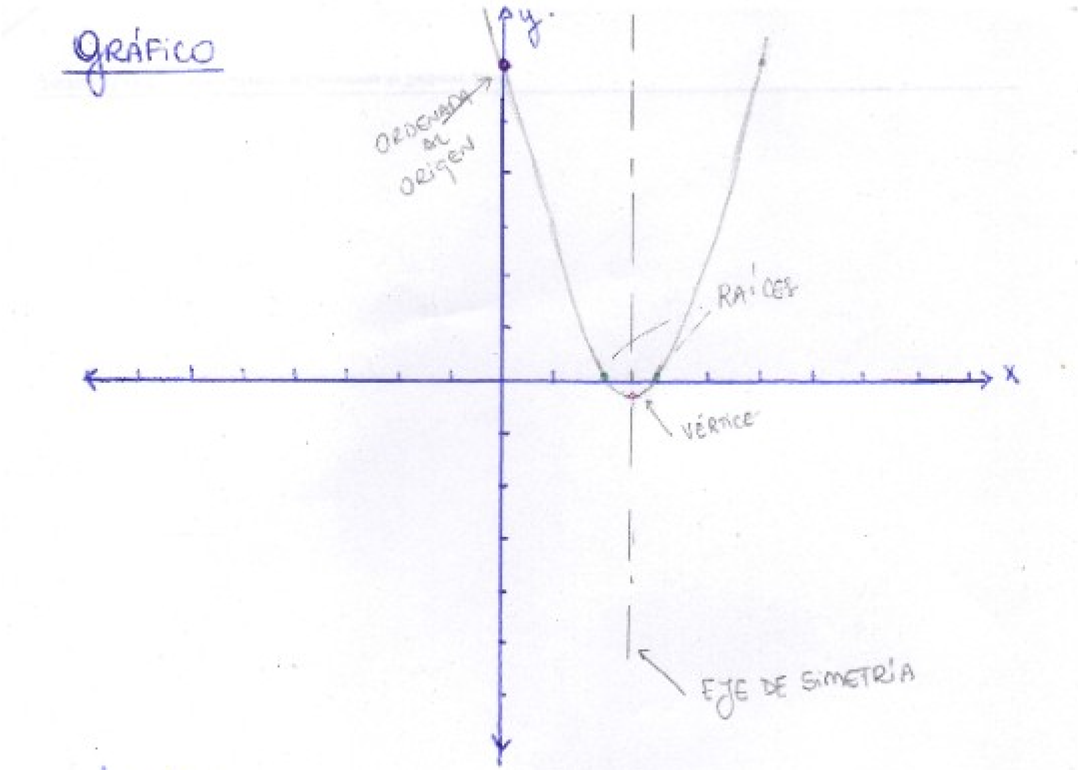
$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$



Análisis

Dom f: $\mathbb{R}$ Im f: $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$

Crec: $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ Decrec: $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$

C^+: $(-\infty, 2) \cup (3; +\infty)$ C^-: $(2;3)$

Máximo: no tiene Mínimo: $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ (Absoluto).

Ejercitación

Analizar y graficar las siguientes funciones

a) $f(x)=x^2+2x-3$ b) $f(x)=x^2+7x+10$ c) $f(x)=3x^2-6x-24$

d) $f(x)=-x^2+6x-9$ e) $f(x)=-x^2+7x-10$ f) $f(x)=-2x^2+5x-2$

Ante cualquier duda o consulta mandar un correo a r.anahi27@gmail.com